

Kompiuterinis funkcijų vizualizavimas – priemonė matematikos mokymui ir mokymuisi

Inga Žilinskienė, Matematikos ir informatikos institutas, El. paštas: ingasolyte@ktl.mii.lt

Santrauka

Straipsnyje aptariamos bendrosios bendrojo lavinimo mokyklos matematikos funkcijų mokymo programos. Nagrinėjamos kompiuterinių programų „Dinaminė geometrija“, „MathematiX“ ir „Autograph“ taikymo mokant funkcijų galimybės. Pateikiami funkcijoms mokyti(is) naudojantis minėtosiomis programomis pavyzdžiai.

Raktiniai žodžiai: matematikos mokymas, funkcijos, funkcijų mokymas, mokomosios kompiuterinės programos „Dinaminė geometrija“, „MathematiX“ ir „Autograph“.

1. Įvadas

Vienas iš problematiškiausių matematikos skyrių yra funkcijos ir sąryšiai. Nagrinėdami jį susiduriama su daugybe, mokiniams sunkiai suprantamų, matematinių formalumų. Mokantis funkcijos sąvoką pradedamas žinių apie šį matematinį objektą konstravimo procesas. Todėl labai svarbu, kad besimokantieji teisingai ir vienareikšmiškai suprastų šią ir kitas su ja susijusias sąvokas bei gebėtų jas paaiškinti. Siekiant išvengti mechaninio žinių įsiminimo bei suteikti galimybę lengviau iš esmės suvokti žinias siekiama vizualizuoti matematikos mokymą taikant įvairias, tarp jų ir kompiuterines, priemones.

Kompiuterinės mokomosios programos gali pagyvinti matematikos mokymą, suteikti dinamiškumo, įgalina vaizdžiai ir vizualiai pateikti mokomąją medžiagą. Psichologai teigia, kad vaizdingas medžiagos pateikimas pagreitina žinių įsisavinimą bei pagerina mokymosi medžiagos įsisavinimą. Kompiuterinėmis programomis sukurti dinamiški brėžiniai palengvina mokytojo darbą, naudojant juos taupomas pamokos laikas, suteikiama galimybių vaizdžiau ir paprasčiau pateikti mokiniams sunkiai suprantamas sąvokas, matematinės abstrakcijas.

Funkcijų mokymas bendrojo lavinimo mokykloje

Šiuolaikinėje matematikos didaktikoje išskiriami trys bendrieji matematiniai gebėjimai – problemų sprendimas, matematinis mąstymas ir matematinis komunikavimas. Remiantis bendrąja bendrojo lavinimo mokyklos matematikos programa viena iš matematikos turinį sudarančių dalių yra temos susijusios su funkcijomis: „Funkcijos ir sąryšiai“ [1],

„Funkcijos. Lygtys ir nelygybės“, „Diferencialinis skaičiavimas“ ir „Integralinis skaičiavimas“ [2].

Funkcinės kintamų dydžių priklausomybės samprata palaipsniui pradeda formuotis nuo I klasės, tačiau pati funkcijos sąvoka ir atitinkama simbolika įvedama tik VIII klasėje. Funkcijų propedeutikos svarbiausias tikslas – suteikti moksleiviams žinių, kad jie galėtų suprasti tokias sąvokas kaip kintamasis, priklausomybė, atitiktis, kintamojo reikšmė, funkcija, grafikas ir pan. VIII klasė – pirmas žingsnis į funkcijų pasaulį. IX, X klasėse toliau palaipsniui plėtojama funkcijos sąvoka, ją detalizuojant, moksleiviai supažindami su naujomis sąvokomis: funkcijos didėjimo, mažėjimo ir pastovumo intervalai, funkcijos lyginumas ir nelyginumas, apibrėžiama, ką vadiname funkcijos grafiku. Moksleiviams pateikiami ne tik nauji apibrėžimai, reikalingi funkcijoms tirti, bet įvedami ir apibrėžimo srities bei reikšmių srities žymenys, išmokstama tirti funkcijų savybes ne tik grafiškai, bet ir algebriskai. Moksleiviai susipažįsta su pagrindinėmis elementariosiomis funkcijomis, jų savybėmis. XI-XII klasėje nagrinėjamos ankstesnėse klasėse nenagrinėtos elementariosios funkcijos, jų savybės, mokoma(si) funkcijos ribos, tolydumo, funkcijos grafiko liestinės ir išvestinės, neapibrėžtinio ir apibrėžtinio integralo sąvokų, mokomasi įgytas žinias pritaikyti praktiškai sprendžiant uždavinius.

2. Kompiuterinės priemonės funkcijų mokymui(si) vizualizuoti

Dinaminė geometrija

Programą „*Dinaminė geometrija*“, angl. k. *Geometer's Sketchpad (Dynamic Geometry for the 21st Century)* 1995 metais sukūrė JAV firma *Key Curriculum Press*, kuri rengia kompiuterines programas tiksliesiems mokslams.

Naudojantis mokomąja kompiuterine priemone „*Dinaminė geometrija*“ galima:

- braižyti ir konstruoti Euklido geometrijos brėžinius;
- transformuoti ir animuoti geometrinius objektus ar sukurtus brėžinius;
- braižyti funkcijų grafikus Dekarto ir polinėse koordinatėse;
- išmatuoti geometrinius objektus pasirinktais matavimo vienetais, norimu tikslumu, taip pat užrašyti tiesų ir apskritimų lygtis;
- brėžinius papildyti pasirinkto dydžio, formos ir šrifto užrašais;

- kurti scenarijus, kuriais automatiškai aprašoma brėžinio kūrimo seka. Scenarijų pagalba galima konstruoti sudėtingas figūras ir fraktalus.

Reikšmingiausia „*Dinaminės geometrijos*“ savybė yra ta, kad tikslingai sukonstruotas geometrinės figūras galima slinkti ar tampyti, išsaugant sukonstruotus geometrinius ryšius. Matavimų vertės taip pat dinamiškos: keičiant geometrinių objektų didumą, jos taip pat keičiasi. Svarbu pabrėžti, kad programa pati nieko nedaro – visus brėžinius kuria ir individualiai juos tyrinėja kiekvienas vartotojas. Programa tik suteikia vartotojui reikalingas priemones.

MathematiX

„*MathematiX*“ – viena iš Izraelio firmos „*Dalin's*“ programinės įrangos programų. Programa Naudojantis mokomąja kompiuterine priemone „*MathematiX*“ galima:

- braižyti funkcijų grafikus Dekarto koordinatinių sistemoje;
- tyrinėti funkcijų savybes – apibrėžimo sritį, kritinius taškus, monotoniškumo intervalus, funkcijos pastovaus ženklo intervalus, asimptotes;
- brėžinius papildyti tik dviejų dydžių užrašais (antraštėmis, svarbiomis pastabomis, formuluotėmis ir kt.);
- nubraižyti papildomus objektus – liestinę taške, statmenis į Ox ir Oy ašis ir pan.
- nubraižyti ir apskaičiuoti kreivėmis apribotų figūrų plotus.

Ši programa išsiskiria paprasta vartotojo sąsaja. Programa yra dinamiška: žymekliui judant koordinatinių plokštumoje, koordinatės yra dinamiškai perskaičiuojamos ir parodomos informacijos lange *Arena Info*. Taip pat nubraižius funkcijos grafiką, galima slinkti juo ir tyrinėti jo savybes. Programa nėra skirta sudėtingiems brėžiniams konstruoti, ji tik suteikia galimybę naudotis joje realizuotomis komandomis.

Autograph

Kompiuterinės programos „*Autograph*“ 2005 m. balandį pasirodė programos 3.10 versija (3 pav.). Tai, kaip teigia patys kūrėjai, kompiuterinė programa padedanti mokytojams ir mokiniams vizualizuoti matematikos mokymą tiek mokykloje, tiek kolegijoje. Ši programa turi tris veiksena: 1) statistikos ir tikimybių; 2) dvimatės plokštumos; 3) trimatės plokštumos.

Remiantis darbe iškeltais tikslais ši programa tyrinėjama tik vienu aspektu – tiriamos galimybės funkcijoms mokyti(is).

Naudojantis kompiuterine programa „*Autograph*“ galima:

- Statistikos ir tikimybių veikseną:
 - įvesti tiesioginius ar grupuotus duomenis;
 - skaičiuoti standartinius statistinius rodiklius;
 - generuoti duomenis naudojant atitinkamus skirstinius;
 - reprezentuoti duomenis naudojant diagramas, grafikus ir t.t.;
- Dvimatės plokštumos veikseną:
 - braižyti funkcijų grafikus Dekarto ir polinėje koordinacių sistemose;
 - diferencijuoti ir integruoti bei atvaizduoti rezultatus;
 - sukurti ir valdyti pagrindinius geometrinius objektus – taškus, atkarpas, vektorius, kreives, kitas standartines figūras ir t. t.;
 - modifikuoti bei transformuoti geometrines figūras;
- Trimatės plokštumos veikseną:
 - braižyti įvairias trimates figūras;
 - braižyti tieses ir plokštumas;
 - atvaizduoti vektorius, atlikti su jais veiksmus ir pan.

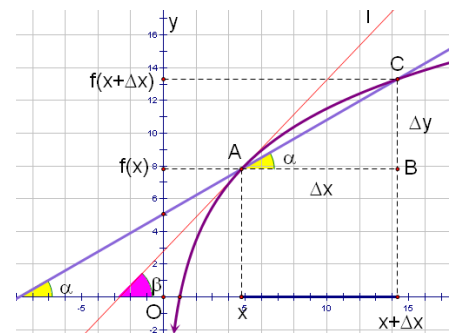
Programa turi nemažai panašumų su „*Dinamine geometrija*“ – galima konstruoti tam tikrus geometrinius objektus bei funkcijų grafikus. Pagrindinis skirtumas – programoje „*Autograph*“ yra mažiau konstravimo galimybių – didžioji dalis funkcijų, geometrinių figūrų yra kūrėjų apibrėžtos. Dėl to vartotojui yra lengviau išmokti dirbti šia programa, tačiau dėl tos pačios priežasties, apribojamos brėžinių konstravimo galimybės. Programoje galima intervaluose apibrėžti funkcijas, spręsti nelygybes, vaizduoti dvimačių ir trimačių objektų sankirtos taškus ir kitas savybes. Dinamiškumo atžvilgiu programa panaši į „*Dinaminę geometriją*“. Sukonstruotų objektų išsidėstymą dvimatėje ir trimatėje plokštumose galima keisti naudojant parametrus, naudoti paprastos animacijos galimybes.

3. Funkcijų mokymo(-si) naudojantis kompiuterinėmis programomis pavyzdžiai

Išnagrinėjus pasirinktų kompiuterinių programų galimybes pateikiami funkcijų mokymo naudojantis kiekviena programa pavyzdžiai.

1. Naudojantis „*Dinamine geometrija*“ galima būtų mokyti(is) suprasti funkcijos išvestinės geometrinę prasmę. Šia programa galima vaizdžiai ir dinamiškai pavaizduoti ir paaiškinti šias sąvokas: argumento ir funkcijos pokytis, diferencialas, taip pat parodyti, kaip susijusios tiesės krypties koeficiento, išvestinės ir liestinės sąvokos. Kitos straipsnyje minimos programos taip pat yra dinamiškos, tačiau jos turi („*Autograph*“) arba visai neturi („*MathematiX*“) panašiam brėžiniui sukonstruoti reikalingų priemonių.

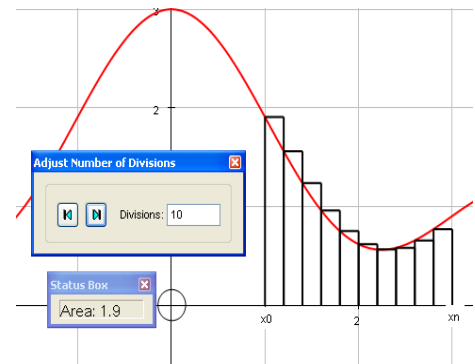
Taigi santykis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ yra stačiojo trikampio ABC kampo α tangens: $\text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nykstant pokyčiui Δx ($\Delta x \rightarrow 0$), taškas C slenka funkcijos grafiko kreive artėdamas prie taško A . Kirstinė AC artėja prie liestinės l , išvestos taške A , taigi $\alpha \rightarrow \beta$. Vadinasi funkcijos išvestinė $f'(x)$ yra lygi kampo, kurį sudaro grafiko liestinė taške $(x;$



pav. 1

$f(x))$ su Ox ašimi, tangentui: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{tg } \alpha = \text{tg } \beta = k$ (k funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės taške $A(x; f(x))$ krypties koeficientas) (1 pav.).

2 pav. pateikiamas „*Autograph*“ sukurtas brėžinys, kuriame dinamiškai iliustruojamas figūros, apibrėžtos paveikslėlyje matoma funkcijos kreivė ir x -ašies atkarpa x_0x_n , kai $x_0=1, x_n=3$, ploto skaičiavimas. Pasirinkus kreivę ir komandą *Find Area* dialogo lange galima pasirinkti, koku metodu bus skaičiuojamas plotas (pavyzdyje pasirinktas stačiakampių, kurie, apskaičiavus duotos funkcijos reikšmes taškuose x_{i+1} ir x_i , sudaromi taip, kad trečioji jo viršūnė pasirinkta didesnioji funkcijos reikšmė, metodas).



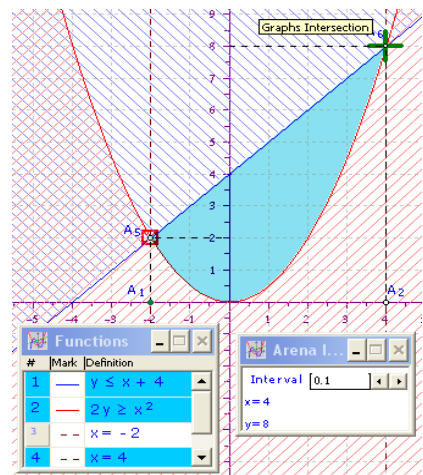
pav. 2

Nubraižomi stačiakampiai, kaip matyti paveikslėlyje. Šių stačiakampių apskaičiuotas plotas rodomas langelyje *Status Box*. Jei norima patikslinti skaičiuojamą plotą, reikia atkarpą x_0x_n padalinti į daugiau dalių ir nubrėžti stačiakampius. Pastebima, kad stačiakampių plotų suma jau

mažiau skiriasi nuo tikslaus ploto, kuris gali būti apskaičiuojamas savarankiškai sąsiuvinuose. Tokiu būdu, t. y. didinant daugiakampių skaičių, galima tikslinti ieškomą plotą – naudojantis programoje sukurtu valdikliu.

3 pav. pateikiamas uždavinio sprendimo programa „MathematiX“ pavyzdys. Prašoma apskaičiuoti figūros plotą, kurios taškai yra nelygybių sistemos $\begin{cases} y \leq x + 4 \\ 2y \geq x^2 \end{cases}$ sprendiniai.

Pirmiausia surandami šios sistemos sprendiniai t. y. nubraižomi funkcijų grafikai, pavaizduojami kiekvienos sistemos nelygybės sprendiniai ir tada randamas sistemos sprendinys (*Solve Inequalities*). Sprendinys parodomas informacijos lange. Tada randamas figūros plotas: pasirenkama komanda *Coloring Area*, ir pažymimas



3 pav.

reikalingos apskaičiuoti srities plotas. Informacijos lange *Arena Info* pateikiamas uždavinio atsakymas. Šią programą galima taikyti tiek demonstracijai, tiek mokiniui dirbant individualiai, pvz., mokinys gali ją efektyviai taikyti patikrindamas, ar teisingai išsprendė uždavinį.

2. Rezultatai

Išnagrinėjus pasirinktąsias programas funkcijoms mokyti pagal įvairius klasifikuojančius požymius, gautos išvados trumpai pateiktos lentelėje (1 lentelė).

1 lentelė. Mokomųjų matematikos programų funkcijoms mokyti palyginimas

Programa	Vadovaujant i			Tyrinėjimo		
	Demonstravimo	Pratybų	Žinių kontrolės	Eksperimentavimo ir modeliavimo	Programavimo kalbų sistemų	Taikomosios programos
„Dinaminė“				+	+(vizualus	-

geometrija“					programavimas)	
„Mathemati X“				-	-	-
„Autograph “				+	-	-

Atliktos bendrųjų bendrojo lavinimo mokyklos matematikos funkcijų mokymo programų ir pasirinktų trijų programų tinkamumo mokykloje nagrinėjamos temoms dėstyti analizės išvados pateikiamos lentelė (2 lentelė). Programos, geriausiai tinkančios vienai ar kitai temai mokyti pažymėtos ženklu „+“.

2 lentelė. Lyginamosios analizės išvados

Progra ma	Bendrojo lavinimo mokykloje dėstomos temos																	
	Funkcijos sąvoka	būdai	Funkcijos grafikas	Elementariųjų f-jų grafikai	F-jų grafikų transformacijos	Funkcijų savybės	Sudėtinė funkcija	funkcija	sąvoka	F-jos tolydumas taške ir intervale	sąvoka	išvestinė	Išvestinių taikymai	tyrimo schema	Pirmąjė funkcija	integralas	Apibrėžimo integralo sąvoka	Apibrėžimo integralo taikymai
„Dina minė geometrija“																		
„Math ematiX“																		
„Auto graph“																		

3. Išvados

Kompiuterinių programų taikymas mokant(is) matematikos suteikia galimybę tą pačią problemą tirti nagrinėjant daugybę skirtingų variantų, tam tereikia įvesti kitus duomenis. Be to, taikant kompiuterį susiejama matematika su informacinėmis technologijomis, ugdomas gebėjimas naudotis kompiuteriu ir taikyti jį įvairiems uždaviniams spręsti.

Summary

Teaching of functions is important area in mathematics education. Educational software packages (“MathematiX“, “Autograph“, “The Geometer’s Sketchpad“) are investigated for function analysis capabilities. Analysis results are presented in table formats. Paper shows programs usability in mathematics lectures for teaching of various functional analysis topics.

Keywords: mathematics teaching, functions, educational software, “MathematiX“, “Autograph“, “The Geometer’s Sketchpad “.